2025年高三年级第一次适应性检测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1--8：BCDD ACCB

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.

9．AD　　10．ABD　　11．BCD

三、填空题：本题共3个小题，每小题5分，共15分.

12．15；　　13．2；　　14．$\frac{24}{25}$.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（13分）

解：(1) 设事件A=“被调查的学生中任选1人，此人是男生”，

设事件B=“被调查的学生中任选1人，此人日均运动时间大于1小时”……………1分

则$P(AB)=60\%\times90\%=54\%$，……………………………………2分

$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=54\%+40\%\times65\%=80\%$ ……………………4分

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{54\%}{80\%}=\frac{27}{40}$，故所求概率为$\frac{27}{40}$……………………6分

(2) 用频率估计概率，则该地区学生日均运动时间大于1小时的概率为0.8…………7分

由题意可知日均运动时间大于1小时的人数$\xi\sim B(4,0.8)$，……　　……9分

所以$E(\xi)=4\times0.8=3.2$ ……………………………　　……11分

$D(\xi)=4\times0.8\times0.2=0.64$ …………………………　　……13分

16．（15分）

解：(1) 连接AM,OM，因为M为$\overset{\frown}{AB}$的中点，且$\angle AOB=120°$，

所以$\angle AOM=\angle BOM=60°$ ……………………………………1分

又$OM=OB$，所以ΔBOM为等边三角形………………………………2分

所以$\angle OMB=60°$，

又因为$\angle AOM=60°$ ……………………　　………3分

所以$OA/\!/MB$，……………………………　　………4分

又因为$MB\subset$平面PMB，$OA\not\subset$平面PMB………　　………5分

所以$OA/\!/$平面PMB ……………………………　　………6分

(2) 因为圆锥体积为$\frac{2}{3}\pi$，所以$\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times PO$，解得$PO=2$，

$S_{OAMB}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta ABM}$，因为$S_{\Delta AOB}$面积为定值，

所以当$S_{\Delta ABM}$最大时，四边形$OAMB$面积最大，此时M为$\overset{\frown}{AB}$的中点，

过点O作OB的垂线交劣弧$\overset{\frown}{AB}$于点N，则$ON\perp OB$.

因为圆锥PO，所以$PO\perp$平面BOM，而$ON,OB\subset$平面BOM，

所以$PO\perp ON,PO\perp OB$ ……………………………………………………8分

以O为坐标原点，分别以ON,OB,OP所在的直线为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$ ……………………………………………………9分

则$O(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$A(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，$B(0,1,0)$，$M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$. ……………10分

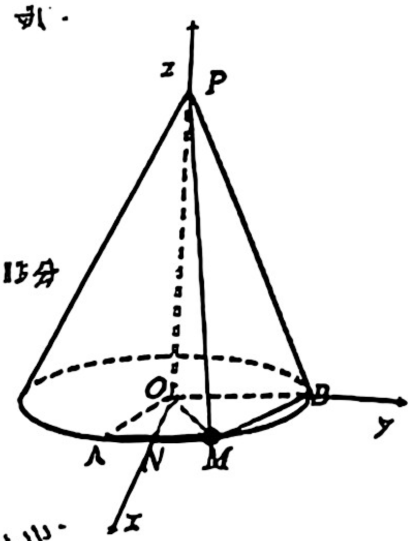
$\overrightarrow{PM}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{AM}=(0,1,0)$

设平面PAM的一个法向量$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，……………………………………11分

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1-2z_1=0\\ y_1=0\end{cases}$

令$x_1=4\sqrt{3}$，则$z_1=3$，$y_1=0$，所以$\vec{m}=(4\sqrt{3},0,3)$ ……………………12分

设平面PBM的一个法向量$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$



则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2-2z_2=0\\ y_2-2z_2=0\end{cases}$

令$z_2=1$，则$y_2=2$，$x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$\vec{n}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,1)$ ……13分

设平面APM与平面BPM所成角为θ，

则$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\frac{11}{\sqrt{57}\times\sqrt{\frac{19}{3}}}=\frac{11}{19}$，

综上，平面APM与平面BPM所成角的余弦值为$\frac{11}{19}$ ……………………15分

(15分)

解：(1) 当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$，$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$ ……………………2分

当$x\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，

当$x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减

当$x\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，……………………5分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 上单调递减.…………6分

(2) $f(x)=ax-\sin x$，$f'(x)=a-\cos x$，$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

当 $a\le 0$ 或 $a\ge 1$ 时，$f'(x)\le 0$ 或 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，此时无极值点；…………7分

当 $0<a<1$ 时，此时存在 $x_1\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，

使得 $f'(x)=0$，即 $\cos x_1=\cos x_2=a$，…………8分

当 $x\in(-\frac{\pi}{2},x_1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_2,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 x_1，x_2 分别是函数的极大值点和极小值点.…………10分

即 $M=f(x_1)=ax_1-\sin x_1$，$m=f(x_2)=ax_2-\sin x_2$，

于是有 $M-m=(ax_1-\sin x_1)-(ax_2-\sin x_2)$，…………11分

因为当 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 y 轴对称，

所以 $x_1+x_2=0$，所以 $x_2=-x_1$，…………12分

所以 $M-m=2ax_1-2\sin x_1$，

由 $\cos x_1=a$，所以 $M-m=2x_1\cos x_1-2\sin x_1$…………13分

设 $h(x_1)=M-m=2x_1\cos x_1-2\sin x_1$，$-\frac{\pi}{2}<x_1<0$，

$h'(x_1)=-2x_1\sin x_1$，$h'(x_1)<0$…………14分

所以 $h(x_1)<h(-\frac{\pi}{2})=2$，因此有 $M-m<2$.…………15分

18.（17分）

解：(1) 由题意得 $\begin{cases}2b=2\sqrt{3}\\ \frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}\end{cases}$…………2分

解得 $\begin{cases}b=\sqrt{3}\\ a=2\end{cases}$，所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$…………4分

(2)(i) 设直线 l 为：$x=my+n$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+n\end{cases}$ 消去 x，得 $(4+3m^2)y^2+6mny+3n^2-12=0$，

当$\Delta=48(3m^2-n^2+4)>0$时，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=-\dfrac{6mn}{4+3m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{3n^2-12}{4+3m^2}$ ①……………………………………………………6分

因为直线AP，AQ的斜率之积为$-\dfrac{1}{4}$，

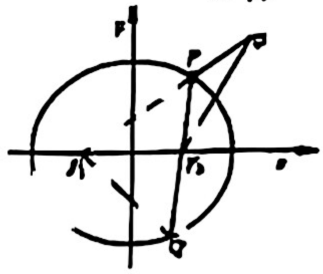
所以$\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+n+2)(my_2+n+2)}=-\dfrac{1}{4}$，

整理得$(4+m^2)y_1y_2+(mn+2m)(y_1+y_2)+n^2+4n+4=0$ ……………………………………6分

把①式代入上式，化简得$n^2-n-2=0$，解得$n=1$或$n=-2$（舍）……………………9分

所以，直线l为$x=my+1$，直线l过定点$(1,0)$ ……………………………………10分

(ii)



因为$\dfrac{S_{\triangle PBF_2}}{S_{\triangle PF_1F_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}|PB|\cdot|PF_2|\sin\angle BPF_2}{\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2}=\dfrac{|PB|}{|PF_1|}=\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}$，$\dfrac{S_{\triangle QF_1F_2}}{S_{\triangle PF_1F_2}}=\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}$，

所以$\dfrac{S_{\triangle PBF_2}}{S_{\triangle QF_1F_2}}=\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}\cdot\dfrac{|PF_2|}{|QF_2|}$ ……………………………………………………12分

因为$|PF_1|=\sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+2x_1+1+3\left(1-\dfrac{x_1^2}{4}\right)}=2+\dfrac{1}{2}x_1$ ……………………………13分

所以$|PF_2|=4-\left(2+\dfrac{1}{2}x_1\right)=2-\dfrac{1}{2}x_1$，

所以$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{2-\frac{1}{2}x_1}{2+\frac{1}{2}x_1}\cdot\dfrac{y_1}{-y_2}=\dfrac{\left(2-\frac{1}{2}(my_1+1)\right)y_1}{-\left(2+\frac{1}{2}(my_1+1)\right)y_2}=\dfrac{(my_1-3)y_1}{my_1y_2+5y_2}$ ②……………

由(2)(i)中①式，得$y_1+y_2=-\dfrac{6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{4+3m^2}$，

故$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，代入上式，化简得

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{(my_1y_2-3y_2)y_1}{(my_1y_2+5y_2)y_2}=\dfrac{\left(\frac{3(y_1+y_2)}{2}-3y_2\right)y_1}{\left(\frac{3(y_1+y_2)}{2}+5y_2\right)y_2}=\dfrac{(3y_1-3y_2)y_1}{(3y_1+13y_2)y_2}$ ……………………………15分

设$\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$，则$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\lambda(3\lambda-3)}{3\lambda+13}$ ……………………………………………………16分

令$\dfrac{\lambda(3\lambda-3)}{3\lambda+13}=\dfrac{3}{5}$，解得$\lambda=-1$或$\lambda=\dfrac{13}{5}$（舍），所以$\dfrac{y_1}{y_2}=-1$，

所以，存在点$P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，使得$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{3}{5}$ ……………………………………………………17分

19、（17分）

解：（1）取 $b_1=-1,b_2=-1,b_3=1$，则 $0=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 不是"非零可表"……………………………………………………………3分

（2）若"存在正整数 m 及 $b_1,b_2,\cdots,b_m\in\{-1,1\}$，使得 $n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m$"，则称 n"可表"

因为 $a_1=1,a_{n+1}=n+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，所以 $a_n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_{n+1}>a_n$ ……………………………………5分

对任意正整数 n，有 $n=a_{n+1}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=(-1)a_1+(-1)a_2+\cdots+(-1)a_n+1\cdot a_{n+1}$，

即取 $m=n+1,b_i=-1(i=1,2,\cdots,n),b_{n+1}=1$，可使正整数均"可表"……………………6分

再取 $m=n+1,b_i=1(i=1,2,\cdots,n),b_{n+1}=-1$，可使负整数均"可表"……………………7分

假设0"可表"，

若 $m\geq2$，则 $0=|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m|$

$$\geq|a_mb_m|-|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{m-1}b_{m-1}|$$

$$\geq a_m-(|a_1b_1|+|a_2b_2|+\cdots+|a_{m-1}b_{m-1}|)=a_m-\sum_{i=1}^{m-1}a_i$$

$$=m-1$$

显然矛盾！

若 $m=1$，则 $0=|a_1b_1|=a_1=1$，矛盾！因此0不满足"可表"，

综上，数列 $\{a_n\}$"非零可表"…………………………………………………………9分

（3）取整数 $a_1=N^2(N>M)$，

令 $a_{2k-1}=N^{2k}+\sum\limits_{i=1}^{2k-2}a_i,a_{2k}=k+\sum\limits_{i=1}^{2k-1}a_i$ ……………………………………………11分

因为 $a_{2k-1}=N^{2k}+\sum\limits_{i=1}^{2k-2}a_i>\sum\limits_{i=1}^{2k-2}a_i,a_{2k}=k+\sum\limits_{i=1}^{2k-1}a_i>\sum\limits_{i=1}^{2k-1}a_i$，

所以当 $n\geq2,a_n>a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，即 $a_n>a_{n-1}$ 且 $a_n\in\mathbf{N}^*$ ……………………13分

对任意正整数 n，有 $n=a_{2n}-\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i,-n=-a_{2n}+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i$，

所以任何非零整数都"可表"…………………………………………………………15分

证明0不满足"可表"，只需证明 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m|>0$，

当 $m=1$ 时，$|a_1b_1|>0$，

当 $m\geq2$ 时，

因为 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m|\geq|a_mb_m|-(|a_1b_1|+|a_2b_2|+\cdots+|a_{m-1}b_{m-1}|)=a_m-\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_i>0$，

因此0不满足"可表"，

综上，存在满足 $a_n>M^n(M>2)$ 的数列"非零可表"……………………………………17分