雅礼教育集团2025年上期期末考试

高一数学试卷

命题人：郑锋　　　　审题人：严泽芬

试卷满分：150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为（　　）

A. $\left(0,+\infty\right)$　　B. $\left(1,+\infty\right)$

C. $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

2. 数据12，12，12，14，15的平均数与众数的差为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

3. 下列四组函数中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数的是（　）

A. $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$　　B. $f(x)=2lgx,g(x)=lgx^2$

C. $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$　　D. $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x,g(x)=x^{\frac{1}{2}}$

4. 设复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=4i$，则 $|z|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

5. 牛奶保鲜时间因储藏温度的不同而不同.假定保鲜时间 $y\left(\mathrm{h}\right)$ 与储藏温度 $x\left({}^{\circ}\mathrm{C}\right)$ 的关系为 $y=k\mathrm{e}^{rx}$（k、r 为常量）.若牛奶在 $0{}^{\circ}\mathrm{C}$ 的冰箱中，保鲜时间约是100h，在 $5{}^{\circ}\mathrm{C}$ 的冰箱中，保鲜时间约是80h，那么在 $10{}^{\circ}\mathrm{C}$ 中的保鲜时间约是（　　）

A. 49h　　B. 56h　　C. 64h　　D. 76h

6. 若函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(1,10\right)$，则函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-4\sqrt{f\left(x\right)-1}$ 的值域为（　　）

A. $\left[-3,-2\right)$　　B. $\left(-3,-2\right)$　　C. $\left[-3,1\right)$　　D. $\left(-3,1\right)$

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+a}{x}$，若对于任意 $x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

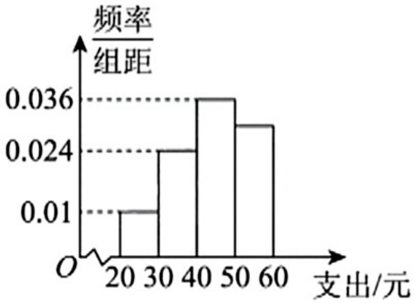
A. $[5,+\infty)$　　B. $(-5,+\infty)$　　C. $(-5,5)$　　D. $[-5,5]$

8. 在ΔABC中，若$\dfrac{b\cos C}{c\cos B}=\dfrac{1+\cos 2C}{1+\cos 2B}$，则$\Delta ABC$的形状是

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形或直角三角形

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某学校为了调查学生在一周生活方面的支出情况，抽出了一个容量为 n 的样本，其频率分布直方图如图所示，其中支出在[50，60)内的学生有 60 人，则下列说法正确的是（　　）



A. 样本中支出在[50，60)内的频率为 0.03

B. 样本中支出不少于 40 元的人数为 132

C. n 的值为 200

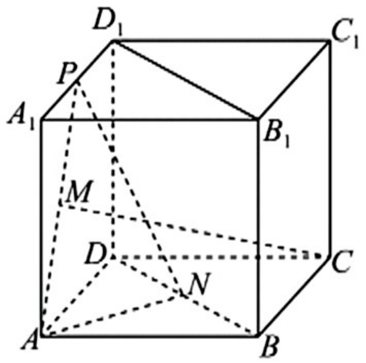
D. 若该校有 2000 名学生，则估计有 600 人支出在[50，60)内

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足：$f(x)$是奇函数，$f(x+1)$是偶函数.则下列选项中说法正确的有（　　）

A. $f(2)=0$　　B. $f(x)$周期为 2

C. $f(x)$的图象关于直线$x=1$对称　　D. $f(x-2)$是奇函数

11. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为底面 $ABCD$ 的中心，P 为棱 A_1D_1 上的动点（不包括两个端点），M 为线段 AP 的中点，则下列结论正确的是（　　）



A. CM 与 PN 是异面直线

B. $|\overrightarrow{CM}|>|\overrightarrow{PN}|$

C. 过 P，A，C 三点的正方体的截面一定不是等腰梯形

D. 平面 $PAN\perp$ 平面 BDD_1B_1

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

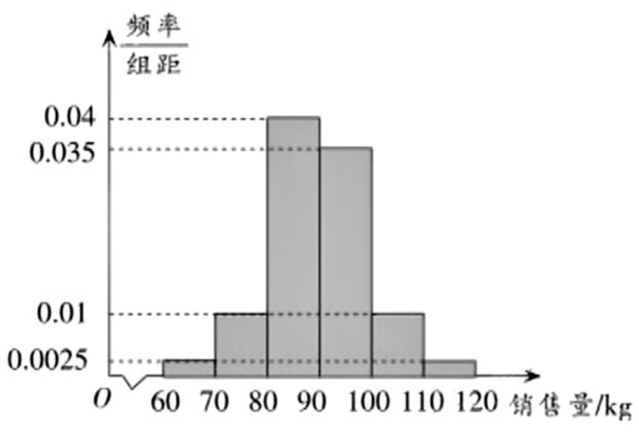
12. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $z=a-1+(a+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则 $|z+2|=$_________.

13. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，$PA=PD=AB=1$，$PB=PC=BC=\sqrt{2}$，则其外接球的表面积为________.

14. 已知圆 O 的半径为 2，弦长 $AB=2\sqrt{3}$，C 为圆 O 上一动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 某家水果店的店长为了解本店苹果的日销售情况，记录了近期连续 120 天苹果的日销售量（单位：kg），并绘制频率分布直方图如下：



（1）请根据频率分布直方图估计该水果店苹果日销售量的众数、中位数和平均数；（同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表）

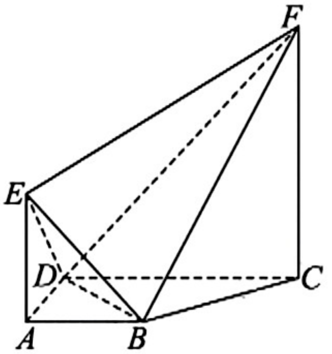
（2）一次进货太多，水果会变得不新鲜；进货太少，又不能满足顾客的需求.店长希望每天的苹果尽量新鲜，又能 90%地满足顾客的需求（在 10 天中，大约有 9 天可以满足顾客的需求）.请问每天应该进多少千克苹果？

16. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a+b+c=16$．

（1）若$a=4$，$b=5$，求$\cos C$的值；

（2）若$\sin A\cos^2\dfrac{B}{2}+\sin B\cos^2\dfrac{A}{2}=2\sin C$，且$\triangle ABC$的面积$S=18\sin C$，求$a$和$b$的值．

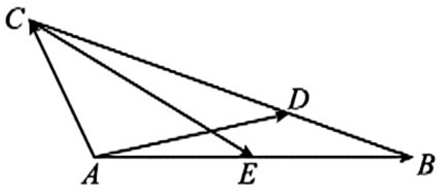
17. 《九章算术》中，将四个面均为直角三角形的四面体称之为鳖臑．如图，$EA\perp$平面$ABCD$，$FC\,//\,EA$，四边形$ABCD$中，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=AE=2$，$CD=CF=4$．



（1）证明：四面体$BCFD$为鳖臑；

（2）求点C到平面BDF的距离．

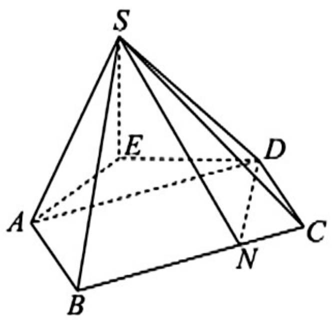
18. 已知$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120°$，点D在边BC上且满足$CD=2BD$．



（1）用$\overline{AB}$、$\overline{AC}$表示$\overline{AD}$，并求$\left|\overline{AD}\right|$；

（2）若点E为边AB中点，求$\overline{CE}$与$\overline{AD}$夹角的余弦值．

19. 如图，在五棱锥$S-ABCDE$中，平面$SAE\perp$平面AED，$AE\perp ED$，$SE\perp AD$．四边形$ABCD$为矩形，且$SE=AB=1$，$AD=3$，$\overline{BN}=2\overline{NC}$．



（1）证明：$SE\perp$平面AED；

（2）若$AE=\sqrt{3}$，求二面角$E-SA-D$的余弦值；

（3）求直线 DN 与平面 SAD 所成角的正弦值的最小值.

雅礼教育集团2025年上期期末考试

高一数学试卷

命题人：郑锋　　　　审题人：严泽芬

试卷满分：150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 函数$f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{1}{x-1}$的定义域为（　　）

A. $\left(0,+\infty\right)$　　　　B. $\left(1,+\infty\right)$

C. $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　　　D. $\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】利用具体函数的定义域的求法求解即可.

【详解】由$\begin{cases}x>0\\x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>0$且$x\neq 1$.

故选：C

2. 数据12，12，12，14，15的平均数与众数的差为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

【答案】B

【解析】

【分析】先求出平均数和众数，再求差即可

【详解】解:平均数为$\dfrac{12+12+12+14+15}{5}=13$，众数为$12$，差为$1$.

故选：B

3. 下列四组函数中$f(x)$与$g(x)$是同一函数的是（　）

A. $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$　　　　B. $f(x)=2lgx,g(x)=lgx^2$

C. $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\-x & (x<0)\end{cases}$　　　　D. $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x,g(x)=x^{\frac{1}{2}}$

【答案】C

【解析】

【分析】函数的值域可由定义域和对应关系唯一确定；当且仅当定义域和对应关系均相同时才是同一函数，再逐一判断即可.

【详解】解：对于A，$f\left(x\right)=x,g\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x}$定义域不同，不是同一函数；

对于B，$f\left(x\right)=2lgx,g\left(x\right)=lgx^2$定义域不同，不是同一函数；

对于C，$f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$，定义域相同，对应法则也相同，满足题意；

对于D，$f(x)=(\dfrac{1}{2})^x,g(x)=x^{\frac{1}{2}}$定义域不同，不是同一函数，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了判断两个函数是否为同一函数，属于基础题.

4. 设复数z满足$(1+i)\cdot z=4i$，则$|z|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

先由条件有$z=\dfrac{4i}{1+i}$，求出复数z，再求复数z的模.

【详解】由$(1+i)\cdot z=4i$，

则$z=\dfrac{4i}{1+i}=\dfrac{4i\cdot\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\cdot\left(1-i\right)}=2+2i$，

所以$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

故选：D.

5. 牛奶保鲜时间因储藏温度的不同而不同.假定保鲜时间$y\left(\mathrm{h}\right)$与储藏温度$x\left({}^{\circ}\mathrm{C}\right)$的关系为$y=k\mathrm{e}^{rx}$（$k$、$r$为常量）.若牛奶在0°C的冰箱中，保鲜时间约是100h，在5°C的冰箱中，保鲜时间约是80h，那么在10°C中的保鲜时间约是（　　）

A. 49h　　B. 56h　　C. 64h　　D. 76h

【答案】C

【解析】

【分析】由题意，建立方程组，结合指数式的运算性质，利用整体思想，可得答案.

【详解】由题意，可得$\begin{cases}100=ke^{r\cdot 0}\\80=ke^{r\cdot 5}\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=100\\e^{5r}=0.8\end{cases}$，则

$y=100e^{10r}=100\cdot e^{2\cdot 5r}=100\cdot\left(e^{5r}\right)^2=100\times 0.8^2=64$.

故选：C.

6. 若函数$f\left(x\right)$的值域为$\left(1,10\right)$，则函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-4\sqrt{f\left(x\right)-1}$的值域为（　　）

A. $\left[-3,-2\right)$　　B. $\left(-3,-2\right)$　　C. $\left[-3,1\right)$　　D. $\left(-3,1\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】令$t=\sqrt{f\left(x\right)-1}$，通过换元法将$g\left(x\right)$表示为$\left(t-2\right)^2-3$，然后根据二次函数的性质求解出$g\left(x\right)$的值域.

【详解】令$t=\sqrt{f\left(x\right)-1}$，得$t\in\left(0,3\right)$，$f\left(x\right)=t^2+1$，则$g\left(x\right)=h\left(t\right)=t^2-4t+1=\left(t-2\right)^2-3$，

所以$h\left(t\right)_{\min}=h\left(2\right)=-3$，对称轴$t=2$，开口向上且$\left|0-2\right|>\left|3-2\right|$，所以$h\left(t\right)<h\left(0\right)=1$，

所以函数$g\left(x\right)$的值域为$\left[-3,1\right)$.

故选：C.

7. 已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+a}{x}$,若对于任意$x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>0$恒成立,则实数$a$的取值范围为(　　)

A. $\left[5,+\infty\right)$　　B. $\left(-5,+\infty\right)$　　C. $\left(-5,5\right)$　　D. $\left[-5,5\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据条件将问题转化为“$a>-x^2-4x$在$\left[1,+\infty\right)$上恒成立”，再根据$a>\left(-x^2-4x\right)_{\max}$求解出$a$的范围.

【详解】因为对于任意$x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>0$恒成立，所以$x^2+4x+a>0$对$x\in\left[1,+\infty\right)$恒成立，

所以$a>\left(-x^2-4x\right)_{\max}$，$x\in\left[1,+\infty\right)$，

又因为$y=-x^2-4x$的对称轴为$x=-2$，所以$y=-x^2-4x$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递减，

所以$\left(-x^2-4x\right)_{\max}=\left(-1-4\right)=-5$，所以$a>-5$，

故选：B.

【点睛】方法点睛：一元二次不等式在指定区间上恒成立求解参数范围问题的处理方法：

（1）分类讨论法：根据参数的临界值作分类讨论；

（2）分离参数法：将自变量和参数分离开来，自变量部分构造新函数，分析新函数的最值与参数的大小关系.

8. 在ΔABC中，若$\dfrac{b\cos C}{c\cos B}=\dfrac{1+\cos 2C}{1+\cos 2B}$，则$\Delta ABC$的形状是

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形或直角三角形

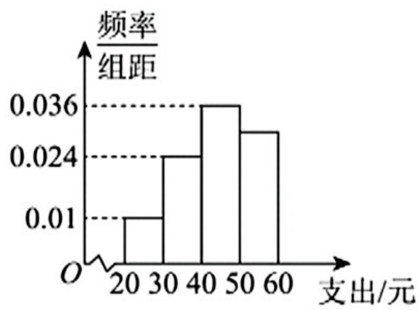
【答案】D

【解析】

【详解】由已知$\dfrac{1+\cos 2C}{1+\cos 2B}=\dfrac{2\cos^2 C}{2\cos^2 B}=\dfrac{\cos^2 C}{\cos^2 B}=\dfrac{b\cos C}{c\cos B}$，$\therefore \dfrac{\cos C}{\cos B}=\dfrac{b}{c}$或$\dfrac{\cos C}{\cos B}=0$，即$C=90^\circ$或$\dfrac{\cos C}{\cos B}=\dfrac{b}{c}$，由正弦定理，得$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$，$\therefore \dfrac{\cos C}{\cos B}=\dfrac{sinB}{sinC}$，即$\sin C\cos C=\sin B\cos B$，即$sin2C=sin2B$，$\because B,C$均为$\Delta ABC$的内角，$\therefore 2C=2B$或$2C=2B=180^\circ$，$\therefore B=C$或$B+C=90^\circ$，$\therefore \Delta ABC$为等腰三角形或直角三角形，故选 D.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某学校为了调查学生在一周生活方面的支出情况，抽出了一个容量为n的样本，其频率分布直方图如图所示，其中支出在[50，60)内的学生有 60 人，则下列说法正确的是（　　）



A. 样本中支出在[50，60)内的频率为 0.03

B. 样本中支出不少于 40 元的人数为 132

C. n的值为 200

D. 若该校有 2000 名学生，则估计有 600 人支出在[50，60)内

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据频率之和为 1 即可求解 A，进而根据选项即可逐一求解.

【详解】样本中支出在[50，60)内的频率为$1-(0.01+0.024+0.036)\times10=0.3$，所以 A 错误；

样本容量为$n=\dfrac{60}{0.3}=200$，支出在[40，50)内的人数为$200\times0.036\times10=72$，

支出不少于 40 元的人数为$72+60=132$，所以 B，C 正确；

若该校有 2000 名学生，则估计有$2000\times0.3=600$人支出在[50，60)内，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足：$f(x)$是奇函数，$f(x+1)$是偶函数.则下列选项中说法正确的有（　　）

A. $f(2)=0$

B. $f(x)$周期为 2

C. $f(x)$的图象关于直线$x=1$对称

D. $f(x-2)$是奇函数

【答案】ACD

【解析】

【分析】由已知条件可得$f(x)$关于$(0,0)$和直线$x=1$对称，从而$f(x)$的周期$T=4$，$f(2)=f(0)=0$，进而可判 ABC，对于 D，由于$f(x)$关于$(0,0)$和直线$x=1$对称，可得$f(x)$关于$(2,0)$对称，再结合周期可得结论

【详解】由$f(x)$是奇函数，$f(x+1)$是偶函数，可得$f(x)$关于$(0,0)$和直线$x=1$对称，从而$f(x)$的周期$T=4$，所以选项 B 错误，选项 C 正确；

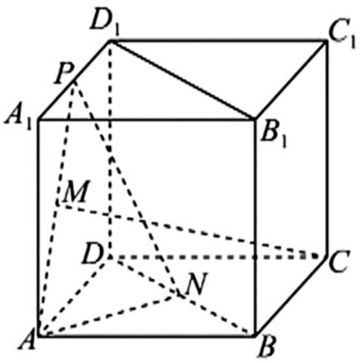
对选项 A：由对称性及奇函数的性质可知$f(2)=f(0)=0$, A 正确；

对选项 D：有已知$f(x)$关于$(0,0)$和直线$x=1$对称，从而$f(x)$关于$(2,0)$对称，

又因为$f(x)$的周期$T=4$，可得$f(x)$关于$(-2,0)$对称，所以$f(x-2)$是奇函数，D正确，

故选：ACD.

11. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为底面 $ABCD$ 的中心，P 为棱 A_1D_1 上的动点（不包括两个端点），M 为线段 AP 的中点，则下列结论正确的是（　　）



A. CM 与 PN 是异面直线

B. $|\overline{CM}|>|\overline{PN}|$

C. 过 P，A，C 三点的正方体的截面一定不是等腰梯形

D. 平面 $PAN\perp$ 平面 BDD_1B_1

【答案】BD

【解析】

【分析】连接 PC，因为点 $M\in PA$，$PA\subset$ 平面 PAC 可得 $CM\subset$ 平面 PAC，因为点 $N\in AC$， $AC\subset$ 平面 PAC 可得 $PN\subset$ 平面 PAC 可判断 A；

以 D 为原点，DA、DC、DD_1 所在的直线分别为 x、y、z 的正方向建立空间直角坐标系，

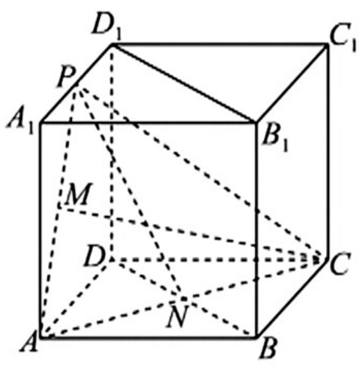
设 $DA=2, D_1P=x\left(0<x<2\right)$，求出 $\left|\overline{PN}\right|$，$\left|\overline{CM}\right|$，$\left|\overline{PN}\right|^2-\left|\overline{CM}\right|^2$ 配方后可判断 B；

取 C_1D_1 的中点 E，可得四边形 $PECA$ 是梯形，由 $AP^2=A_1P^2+AA_1^2=C_1E^2+CC_1^2=CE^2$，

可判断 C；

由线面垂直的判断定理可得 $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，再由面面垂直的判断定理可判断 D.

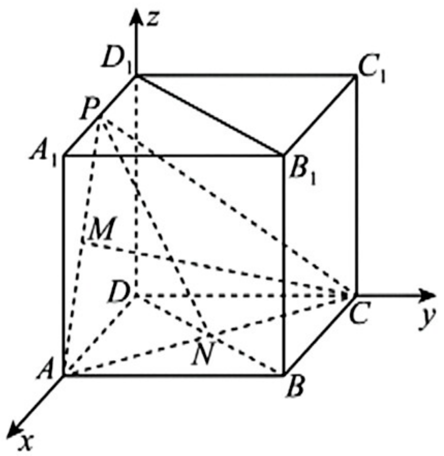
【详解】



如上图，连接 PC，因为点 $M\in PA$， $PA\subset$ 平面 PAC，所以 M 点在平面 PAC，即 $CM\subset$ 平面 PAC，

因为点 $N\in AC$， $AC\subset$ 平面 PAC，所以 N 点在平面 PAC，即 $PN\subset$ 平面 PAC，

即 PN、CM 不是异面直线，故 A 错误；



如上图，以D为原点，DA、DC、DD_1所在的直线分别为x、y、z的正方向建立空间直角坐标系，

设$DA=2, D_1P=x\left(0<x<2\right)$，则$P\left(x,0,2\right), N\left(1,1,0\right)$，$M\left(\dfrac{2+x}{2},0,1\right), C\left(0,1,0\right)$，

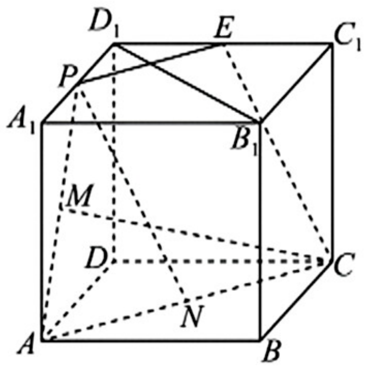
所以$\overrightarrow{PN}=\left(1-x,1,-2\right)$，$\overrightarrow{CM}=\left(\dfrac{2+x}{2},-1,1\right)$，

$\left|\overrightarrow{PN}\right|=\sqrt{\left(1-x\right)^2+5}$，$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^2+2}$，

所以$\left|\overrightarrow{PN}\right|^2-\left|\overrightarrow{CM}\right|^2=\left(1-x\right)^2-\left(\dfrac{2+x}{2}\right)^2+3=\dfrac{3}{4}\left(x-2\right)^2+3$，

因为$0<x<2$，所以$\left|\overrightarrow{PN}\right|^2-\left|\overrightarrow{CM}\right|^2>0$，

即$\left|\overrightarrow{PN}\right|>\left|\overrightarrow{CM}\right|$，故 B 正确；

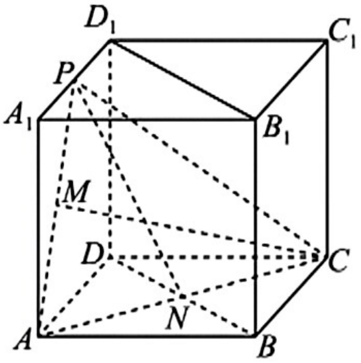


如上图，取C_1D_1的中点E，连接CE、PE，则$PE//AC$，$PE=\dfrac{1}{2}AC$，

所以四边形$PECA$是梯形，

因为$AP^2=A_1P^2+AA_1^2=C_1E^2+CC_1^2=CE^2$，所以$AP=CE$，

所以此时四边形$PECA$是等腰梯形，故 C 错误；



如上图，因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC \perp BD$，

因为 $DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $DD_1 \perp AC$，因为 $DD_1 \cap BD = D$，

所以 $AC \perp$ 平面 DD_1B_1B，且 $AC \subset$ 平面 PAC，所以平面 PAC 平面 DD_1B_1B，

即平面 $PAN \perp$ 平面 DD_1B_1B，故 D 正确.

故选：BD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 $a \in \mathrm{R}$，若 $z = a-1+(a+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则 $|z+2| =$_________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据条件，得到 $z = 2\mathrm{i}$，再利用模长的计算公式，即可求解.

【详解】由 $z = a-1+(a+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，得 $a-1=0$，解得 $a=1$，

所以 $z=2\mathrm{i}$，则 $|z+2| = |2+2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$.

13. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，$PA=PD=AB=1$，$PB=PC=BC=\sqrt{2}$，

则其外接球的表面积为________.

【答案】3π

【解析】

【分析】根据勾股定理和它的逆定理，结合球的表面积公式进行求解即可.

【详解】如图取 AD 中点 E，底面中心为 O_1，外接球的球心为 O，则 $OO_1 \perp$ 底面 $ABCD$，

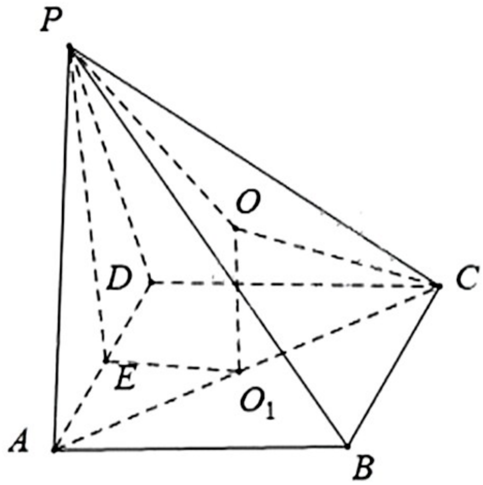
由因为 $PA=PD=AB=1$，$PB=PC=BC=\sqrt{2}$，

所以 $PA^2+AB^2=PB^2$，$PD^2+DC^2=PC^2$，$PD^2+PA^2=AD^2$

即 $AB\perp PA$，$CD\perp PD$，$PA\perp PD$，

因此有 $O_1E=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$， $PE=\frac{1}{2}\sqrt{PA^2+AD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$O_1C=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，



设球的半径为 R，$OO_1=d$.

在直角梯形 PEO_1O 中，$R^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-d\right)^2$

在直角 OO_1C 中，$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+d^2$

联立得 $d=0$，即 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故球的表面积为 $4\pi R^2=3\pi$.

故答案为：3π

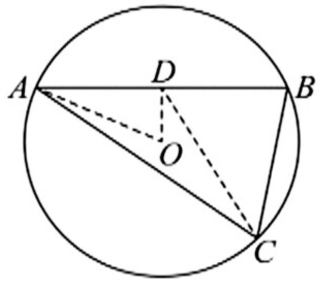
14. 已知圆 O 的半径为 2，弦长 $AB=2\sqrt{3}$，C 为圆 O 上一动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值为______.

【答案】6

【解析】

【分析】取 AB 的中点 D，连接 CD，OD，计算 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}^2-3$，求出 OD，得出 CD 的最大值，即可得出 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值.

【详解】取 AB 的中点 D，连接 CD，OD，OA，如图所示：



因为 D 为 AB 中点，所以 $AD=DB=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2=-3+0+\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DC}^2-3$，

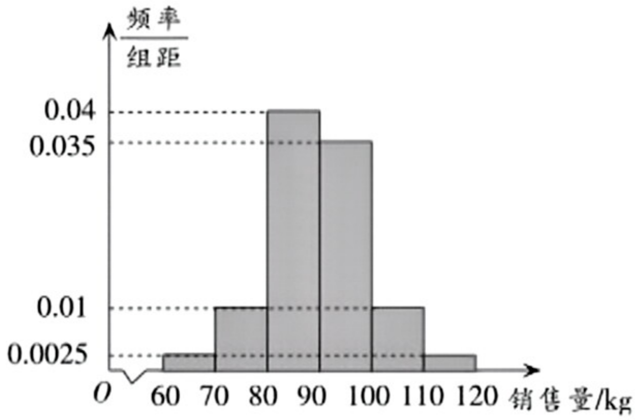
因为 $OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=1$，所以最大值为 $CD_{\max}=OD+r=1+2=3$；

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值为 $3^2-3=6$.

故答案为：6.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 某家水果店的店长为了解本店苹果的日销售情况，记录了近期连续 120 天苹果的日销售量（单位：kg），并绘制频率分布直方图如下：



（1）请根据频率分布直方图估计该水果店苹果日销售量的众数、中位数和平均数；（同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表）

（2）一次进货太多，水果会变得不新鲜；进货太少，又不能满足顾客的需求.店长希望每天的苹果尽量新鲜，又能 90%地满足顾客的需求（在 10 天中，大约有 9 天可以满足顾客的需求）.请问每天应该进多少千克苹果？

【答案】（1）众数为 85，中位数 89.375，平均数 89.75；（2）102.5 千克.

【解析】

【分析】（1）根据图中最高矩形可求众数，利用频率是 0.5 可求中位数，利用区间中点的值和频率可求平均数；

（2）先确定进货量的范围 $[100,110)$，结合能 90%地满足顾客的需求，可求结果.

【详解】（1）如图示：区间$[80,90)$频率最大，所以众数为85，

中位数设为x，则$0.025+0.1+(x-80)\times0.04=0.5$，可得$x=89.375$.

平均数为：$\bar{x}=(65\times0.0025+75\times0.01+85\times0.04+95\times0.035+105\times0.01+115\times0.0025)\times10$

$=89.75$.

（2）日销量[60，100)的频率为$0.875<0.9$，日销售量[60，110)的频率为$0.975>0.9$，

故所求的量位于$[100,110)$.

由$0.9-0.025-0.1-0.4-0.35=0.025$,得

$100+\dfrac{0.025}{0.01}=102.5$,

故每天应该进102.5千克苹果

16. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a+b+c=16$.

（1）若$a=4$，$b=5$，求$\cos C$的值；

（2）若$\sin A\cos^2\dfrac{B}{2}+\sin B\cos^2\dfrac{A}{2}=2\sin C$，且$\triangle ABC$的面积$S=18\sin C$，求$a$和$b$的值.

【答案】（1）$-\dfrac{1}{5}$

（2）$a=b=6$

【解析】

【分析】（1）求出$c=7$，利用余弦定理即可求解；

（2）由三角恒等变换和正弦定理得到$a+b=3c$，结合$a+b+c=16$求出$c=4$，由三角形面积得到方程，求出$ab=36$，从而求出a和b的值.

【小问1详解】

$a=4$，$b=5$，$a+b+c=16$，故$c=7$，

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16+25-49}{2\times4\times5}=-\dfrac{1}{5}$；

【小问2详解】

$\sin A\cos^2\dfrac{B}{2}+\sin B\cos^2\dfrac{A}{2}=2\sin C$，由半角公式得

$\sin A\cdot\dfrac{1+\cos B}{2}+\sin B\cdot\dfrac{1+\cos A}{2}=2\sin C$，

即$\sin A+\sin B+\sin A\cos B+\sin B\cos A=4\sin C$，

即$\sin A+\sin B+\sin(A+B)=4\sin C$，$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin C$，

$\sin A+\sin B=3\sin C$，

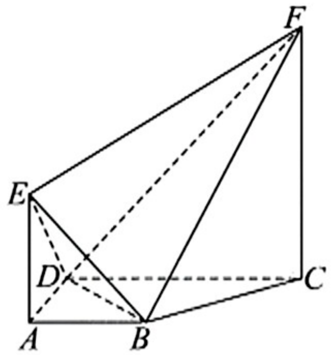
由正弦定理得 $a+b=3c$，

因为 $a+b+c=16$，所以 $4c=16$，解得 $c=4$，故 $a+b=12$，

$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=18\sin C$，故 $ab=36$，

联立 $a+b=12$ 与 $ab=36$ 得 $a=b=6$.

17.《九章算术》中，将四个面均为直角三角形的四面体称之为鳖臑. 如图，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，$FC\,//\,EA$，四边形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=AE=2$，$CD=CF=4$.



（1）证明：四面体 $BCFD$ 为鳖臑；

（2）求点 C 到平面 BDF 的距离.

【答案】（1）证明过程见解析

（2）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】（1）由余弦定理和勾股定理及逆定理得到 $BD\perp BC$，$\triangle BCD$ 为直角三角形，由题目条件得到 $BD\perp$ 平面 BCF，$BD\perp BF$，$\triangle BDF$ 为直角三角形，结合 CDF, BCF 为直角三角形，得到结论；

（2）由等体积法进行求解，得到点 C 到平面 BDF 的距离.

【小问 1 详解】

四边形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=2$，$CD=4$，

由勾股定理得 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=2\sqrt{2}$，且 $\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，

故 $\angle CDB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle CDB=8+16-2\times 2\sqrt{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$，

故 $BD^2+BC^2=CD^2$，由勾股定理逆定理得 $BD\perp BC$，$\triangle BCD$ 为直角三角形.

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$FC\,//\,EA$，故 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FC \perp BD$，

又因为 $BC \cap FC = C$，$BC, FC \subset$ 平面 BCF，所以 $BD \perp$ 平面 BCF，

又因为 $BF \subset$ 平面 BCF，所以 $BD \perp BF$，

故V BDF 为直角三角形.

因为 $FC \perp$ 平面 $ABCD$，$BC, CD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FC \perp BC$，$FC \perp CD$，

所以 CDF，BCF 为直角三角形.

综上，四面体 $BCFD$ 为鳖臑；

【小问 2 详解】

$S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$，

因为 $FC \perp$ 平面 $ABCD$，且 $CF = 4$，所以 $V_{F-BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CF = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3}$，

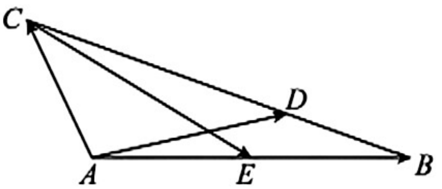
由（1）知 $BD \perp BF$，在 Rt BCF 中，由勾股定理得 $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = 2\sqrt{6}$，

所以 $S_{BDF} = \frac{1}{2} BD \cdot BF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}$，

设点 C 到平面 BDF 的距离为 d，其中 $V_{C-BDF} = V_{F-BCD} = \frac{16}{3}$，

所以 $d = \frac{3V_{C-BDF}}{S_{BDF}} = \frac{3 \times \frac{16}{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$，点 C 到平面 BDF 的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

18. 已知V ABC 中，$AB = 2$，$AC = 1$，$\angle BAC = 120°$，点 D 在边 BC 上且满足 $CD = 2BD$.



（1）用 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，并求 $\left|\overrightarrow{AD}\right|$；

（2）若点 E 为边 AB 中点，求 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 夹角的余弦值.

【答案】（1）$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\frac{\sqrt{13}}{3}$

（2）$\frac{3\sqrt{39}}{26}$

【解析】

【分析】（1）根据向量的线性运算即可求解，

（2）由向量的线性运算表示向量，由数量积，利用夹角公式即可求解.

【小问 1 详解】

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{\frac{4}{9}\times4+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

，

【小问 2 详解】

易知 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

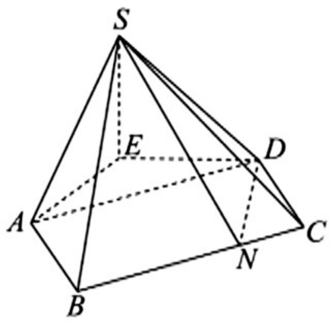
所以 $\left|\overrightarrow{CE}\right|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{\frac{1}{4}\times4+1-2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3}$，

又

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，

所以 $\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CE}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，

19. 如图，在五棱锥 $S-ABCDE$ 中，平面 $SAE\perp$ 平面 AED，$AE\perp ED$，$SE\perp AD$．四边形 $ABCD$ 为矩形，且 $SE=AB=1$，$AD=3$，$\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$．



（1）证明：$SE\perp$ 平面 AED；

（2）若 $AE=\sqrt{3}$，求二面角 $E-SA-D$ 的余弦值；

（3）求直线 DN 与平面 SAD 所成角的正弦值的最小值.

【答案】（1）证明过程见解析

（2）$\frac{1}{3}$

（3）$\frac{\sqrt{26}}{13}$

【解析】

【分析】（1）根据面面垂直，得到线面垂直，$DE \perp SE$，结合 $SE \perp AD$ 得到线面垂直；

（2）作出辅助线，找到 $\angle ETG$ 即为二面角 $E-SA-D$ 的平面角，由勾股定理和余弦定理求出各边，最后由余弦定理求出二面角的余弦值；

（3）设点 N 到平面 SAD 的距离为 h，直线 DN 与平面 SAD 所成角大小为 θ，则 $\sin\theta = \frac{h}{DN} = \frac{h}{\sqrt{2}}$，要想直线 DN 与平面 SAD 所成角的正弦值的最小，则 h 最小即可，设 $AE = m$，由等体积法和余弦定理，面积公式得到 $h = \frac{3}{\sqrt{-\left(m^2-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{117}{4}}}$，从而求出 h 的最小值，得到正弦的最小值.

【小问 1 详解】

平面 $SAE \perp$ 平面 AED，交线为 AE，又 $AE \perp ED$，$DE \subset$ 平面 AED，

所以 $DE \perp$ 平面 SAE，

又 $SE \subset$ 平面 SAE，所以 $DE \perp SE$，

因为 $SE \perp AD$，$AD \cap DE = D$，$AD, DE \subset$ 平面 AED，

故 $SE \perp$ 平面 AED；

【小问 2 详解】

$AE = \sqrt{3}$，$AE \perp ED$，$AD = 3$，

由勾股定理得 $ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{6}$，

$SE \perp$ 平面 AED，$AE \subset$ 平面 AED，

所以 $SE \perp AE$，

因为 $SE = 1$，$AE = \sqrt{3}$，由勾股定理得 $SA = \sqrt{SE^2 + AE^2} = 2$，

过点 E 作 $ET \perp SA$ 于点 T，则 $ET = \frac{SE \cdot AE}{SA} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $AT = \sqrt{AE^2 - ET^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$，

过点T作$TG \perp SA$，交AD于点G，连接EG，

故$\angle ETG$即为二面角$E-SA-D$的平面角，

由勾股定理得$SD=\sqrt{SE^2+ED^2}=\sqrt{1+6}=\sqrt{7}$，

又$AD=3$，

由余弦定理得$\cos\angle SAD=\dfrac{SA^2+AD^2-SD^2}{2SA\cdot AD}=\dfrac{4+9-7}{2\times2\times3}=\dfrac{1}{2}$，故$\angle SAD=\dfrac{\pi}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ATG$中，$\tan\angle TAG=\dfrac{TG}{AT}$，即$\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{TG}{\frac{3}{2}}$，解得$TG=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

故$AG=\sqrt{AT^2+TG^2}=3$，

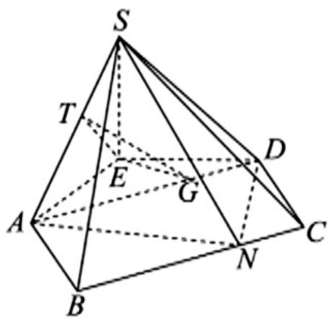
在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中，$\cos\angle EAD=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由余弦定理得$EG^2=AE^2+AG^2-2AE\cdot AG\cos\angle EAD=3+9-2\times\sqrt{3}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=6$，

故$EG=\sqrt{6}$，

在ETG中，由余弦定理得$\cos\angle ETG=\dfrac{ET^2+TG^2-EG^2}{2ET\cdot TG}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{27}{4}-6}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}$，

故二面角$E-SA-D$的余弦值为$\dfrac{1}{3}$；



【小问3详解】

连接AN，因为$\overline{BN}=2\overline{NC}$，$BC=3$，所以$CN=1$，

又$CD=1$，$DC\perp CB$，由勾股定理得$DN=\sqrt{CN^2+DC^2}=\sqrt{2}$，

设点N到平面SAD的距离为h，直线DN与平面SAD所成角大小为θ，

则$\sin\theta=\dfrac{h}{DN}=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$，

要想直线DN与平面SAD所成角的正弦值的最小，则h最小即可，

$S_{ADN}=\frac{1}{2}AD\cdot 1=\frac{3}{2}$,

由（1）得 $SE\perp$ 平面 AED，故 $V_{S-ADN}=\frac{1}{3}S_{ADN}\cdot SE=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$，

设 $AE=m$，则 $ED=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{9-m^2}$， $SA=\sqrt{1+m^2}$，

故 $SD=\sqrt{SE^2+DE^2}=\sqrt{1+9-m^2}=\sqrt{10-m^2}$，

在 SAD 中，由余弦定理得 $\cos\angle ASD=\frac{SA^2+SD^2-AD^2}{2SA\cdot SD}=\frac{1+m^2+10-m^2-9}{2\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{10-m^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{10-m^2}}$，

故 $\sin\angle ASD=\sqrt{1-\cos^2\angle ASD}=\frac{\sqrt{-m^4+9m^2+9}}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{10-m^2}}$，

则 $S_{SAD}=\frac{1}{2}SA\cdot SD\sin\angle ASD=\frac{1}{2}\sqrt{-m^4+9m^2+9}$，

因为 $V_{S-ADN}=V_{N-ADS}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{3}S_{SAD}\cdot h=\frac{1}{6}\sqrt{-m^4+9m^2+9}\cdot h=\frac{1}{2}$，

故 $h=\frac{3}{\sqrt{-m^4+9m^2+9}}=\frac{3}{\sqrt{-\left(m^2-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{117}{4}}}$，

当 $m^2=\frac{9}{2}$ 时，h 取得最小值，最小值为 $h=\frac{3}{\sqrt{\frac{117}{4}}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

故直线 DN 与平面 SAD 所成角的正弦值的最小值为 $\sin\theta=\frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$.

【点睛】方法点睛：立体几何二面角求解方法：

（1）作出辅助线，找到二面角的平面角，并结合余弦定理或勾股定理进行求解；

（2）建立空间直角坐标系，求出平面的法向量，利用空间向量相关公式求解.